Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Sciences de la Matière
Département de physique

Corrigé de l'examen de moyenne durée de physique statistique L3(PM etPF)

Exercice 1 : 08/08

I 1°Les niveaux à une particule sont données par :$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,.n^2$. 0.5

En utilisant la mécanique quantique avec n représente le nombre quantique .

$$\varphi(E) = n = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2mE} \qquad 0.5$$

$$\Omega(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE}\delta E = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\delta E \qquad 0.5$$

2° En utilisant la physique statistique classique :

$\varphi(E)$est le nombre de micro états ≤E à deux dimensions.

$\varphi(E) = \frac{\int_0^L dr \int_{-p}^{+p} dp}{h} = \frac{L.(2p)}{h}$, 01 on a : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et p=$\sqrt{2mE}$ 0.5

$\varphi(E) = \frac{2L}{2\pi\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2mE}$ 0.5

$\Omega(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE}\delta E = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\delta E$ 0.5

3° On est dans le cas d'un espace réel à trois dimensionet l'espace de phase à six dimensions, le nombre de micro états accessibles à la particule :

a- Si c'est un boson de spin zéro :

$\varphi(E) = \frac{volume\ de\ l'espace\ des\ phases}{volume\ d'unecellule} = \frac{\int dr\, dp}{h^3} = \frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi p^3$ 1,5

$\varphi(E)$=$\frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi p^3$=$\frac{4}{3}\frac{V}{h^3}\pi(2mE)^{\frac{3}{2}}$ 01

$\Omega(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE}\delta E = 2\frac{V}{h^3}\,\pi(2m)^{3/2}(E)^{\frac{1}{2}}.\delta E$ 01

b-Si c'est un fermions de spin ½ ,le nombre de micro états dans ce cas sera multiplié par deux .0,5

II : 05/05

Le nombre de molécules dont le vecteur vitesse à ses composantes sur trois axes comprise entre v_x et v_x+dv_x ,v_y et v_y+dv_y et v_z et v_z+dv_z est donnée par la loi de Boltzmann :

$d^3N_{v_x,v_y,v_z} = N.A.exp - \frac{mv^2}{2kT}\,.dv_x dv_y\, dv_z$ 01

En intégrant sur tout l'espace des vitesses , on montre que la constante A a pour valeur :$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ 0.5

Un passage en coordonnées sphériques (v,θ,φ) et une intégration sur les variables angulaires , on obtient facilement :

$dN_v = 4\pi NA\, v^2 exp - \frac{mv^2}{2kT}\, dv$ 01

2° La valeur la plus probable du module de la vitesse ,notée v* se calcule en cherchant le maximum de la fonction :

$\left(\frac{dN_v}{dv}\right)_{v=\,v*} = 0 \equiv v^* = \left(\frac{2kT}{M}\right)^{1/2}$ 01

3° La vitesse moyenne est donnée par la relation : $\bar{v} = \frac{\int v dN_v}{\int dN_v} = 4\pi A \int_0^\infty v^3 . exp - \frac{mv^2}{2kT}\, dv$ 01,5

$\Longrightarrow \bar{v} = \left(\frac{8kT}{m\pi}\right)^{1/2}$ 0.5

<u>III</u> : 07/07

1° L'énergie d'un oscillateur harmonique quantique est donnée par la relation :

$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$ avec n est un entier positif ou nul. 0.25

2° La fonction de partition d'un oscillateur harmonique est :

$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}{}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)} = e^{-\beta\frac{h\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n}$. 0.50

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n}$ ce terme représente une somme d'une série géométrique qui est égal à $\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{e^{-\beta\frac{h\nu}{2}}}{1-e^{-\beta h\nu}} = \frac{1}{e^{\beta\frac{h\nu}{2}} - e^{-\beta\frac{h\nu}{2}}}$ 0.25 $\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2sh(\beta\frac{h\nu}{2})}$. 0.25

3° Pour N oscillateur on en déduit : z=z_1^N dans le cas ou on a considérés les oscillateurs comme indépendants dons discernables. 0,25

III- la fonction grand canonique est donnée par : $Z_G = \sum_N \sum_{\{j\}} \sum_i e^{-\beta(\varepsilon-\mu N)}$ 0.25

$Z_G = \sum_N^{\infty} e^{+\beta\mu N} . \sum_{\{j\}} \sum_i e^{-\beta\varepsilon} = \sum_N^{\infty} e^{+\beta\mu N} . z_c$ 0.25

avec z_c est la fonction de partition canonique .

Calcul de la fonction de partition canonique pour une particule :

$Z_c = \frac{1}{N!}.\frac{\int \partial\tau}{h^3} e^{-\beta\varepsilon} = \frac{1}{N!}.\frac{\int \partial r.\partial p}{h^3} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} = \frac{1}{h^3} \iiint dr \iiint e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}.dp$ 0.50

on obtient alors que :

$Z_c = \frac{V}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}.dp = \frac{V}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}.dp_x . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}}.dp_y . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p_z^2}{2m}}.dp_z.$ 0.50

$Z_c = \frac{V}{h^3}.\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$ avec a=$\frac{\beta}{2m}$ 0.50

Donc: $Z_c = \frac{V}{h^3}.\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} = \frac{V}{h^3}.\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} = \frac{V}{h^3}.(2\pi m k_B T)^{3/2}$ 0.25

Pour N particules indiscernables on :

$Z_{N=}(Z_c)^N = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}.(2\pi m k_B T)^{3N/2}$ 0.25

Pour la fonction grand canonique , on a alors :

$Z_G = \sum_N^{\infty} e^{+\beta\mu N}\frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}.(2\pi m k_B T)^{3N/2}$ 0.50

$Z_G = \sum_N^{\infty}\frac{\left(e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m k_B T)^{3/2}\right)^N}{N!}$ 0.50 Or on a déja : $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^i}{i!} = e^f$ **donc , on obtient:**

$Z_G = exp\left(e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m k_B T)^{3/2}\right)$ 0.25 et $\log Z_G = e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m k_B T)^{3/2}$ 0.25

Calcul du grand potentiel

$\Omega = -k_B T$ $\log Z_G = -k_B T(e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m k_B T)^{3/2}) = -(e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{5/2}$
0.50

Calcul de la pression:

P=$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = e^{+\beta\mu}.\frac{1}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{5/2}.$ 0.25

L'équation d'état est donnée par :

PV=$e^{+\beta\mu}.\frac{1}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{5/2}$.V=$e^{+\beta\mu}.\frac{1}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{3/2}$..V. $k_B T$ 0.25

On o déjà : N=$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V} = \beta e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{5/2} = e^{+\beta\mu}.\frac{V}{h^3}.(2\pi m)^{3/2})\,(k_B T)^{3/2}.$
0.25

Donc , on obtient aisément: PV=N $k_B T$ 0.25